Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (93), 2015

УДК 519.21

Инвариантность стационарного распределения замкнутых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками

А.Р. Еремина

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками. Время пребывания прибора в каждом режиме имеет показательное распределение, а количество работы по обслуживанию поступающих заявок – произвольное распределение с конечным математическим ожиданием. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся на обслуживание заявок.
Ключевые слова: сеть массового обслуживания, инвариантность, многорежимное обслуживание, LCFS PR.

The closed queuing network with multimode service and heterogeneous applications is considered. The residence time of the device in each mode has an exponential distribution. The quantity of work, which is necessary for servicing of incoming demands, has an arbitrary distribution with finite expectation value. It is proved that stationary distribution of queuing network state probabilities is invariant in relation to functional form of distribution of work's quantities, which are necessary for servicing of demands.
Keywords: queuing network, invariance, multimode service, LCFS PR.

Введение. Сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями позволяют моделировать ситуации, когда обслуживающие приборы частично надёжны, что особенно актуально для реальных транспортных и производственных сетей, сетей связи и передачи данных, информационных и компьютерных сетей и т. д. Такие сети рассматривались, например, в [1]–[3]. Ю.В. Малинковским, А.Ю. Нуеманом и Ю.Е. Летунович в [4]–[6] исследовались сети с многорежимными стратегиями в случае различных дисциплин обслуживания, причем Ю.Е. Летунович были впервые рассмотрены сети с многорежимными стратегиями и заявками нескольких типов. Было установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний таких сетей имеет форму произведения. Однако в указанных работах полагалось, что длительности обслуживания заявок и времена пребывания приборов в режимах имеют экспоненциальные распределения. В реальных сетях указанные распределения чаще всего отличаются от экспоненциального.

Результаты для сетей с многорежимными стратегиями обслуживания были обобщены А.Н. Старовойтовым в [7]–[8] на случай произвольного распределения времени обслуживания. Однако в работах А.Н. Старовойтова свойство инвариантности устанавливалось для сетей с заявками одного типа, что ограничивает использование полученных результатов.

Поэтому в данной работе рассматриваются сети, в которых величина работы по обслуживанию заявки имеет произвольный закон распределения. Устанавливается, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от вида законов распределения величин работ по обслуживанию заявок в узлах и имеет мультипликативную форму, если фиксированы первые моменты этих законов.

Описание сети. Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которой циркулируют заявки M типов ($\sum_{l=1}^{N} n(l) = \overline{N} < \infty$ заявок).

После обслуживания в l-м узле заявка типа u независимо от других заявок мгновенно направляется в k-й узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$ ($\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(l,u)(k,v)} = 1$; $l,k = \overline{1,N}$; $u,v = \overline{1,M}$).

В каждом из N узлов находится единственный обслуживающий прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах $0,1,\ldots,r_l$, $l = \overline{1,N}$. Переключение может осуществляться только на соседние режимы. По истечении времени пребывания в режиме прибор переходит в другой режим мгновенно. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Заявки в узлах обслуживаются в соответствии с дисциплиной LCFS PR (Last Come – First Served Preemptive Resume). Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится первой в очереди на обслуживание. Таким образом, поступающие в узел заявки имеют абсолютный приоритет.

Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору, то есть если в l-м узле в момент времени t находится $n(l)$ заявок, то заявка, которая находится на обслуживании, имеет номер $n(l)$, а последняя заявка в очереди – номер 1. Поступающая заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n(l)+1$, а вытесненная заявка сохраняет номер $n(l)$ и становится первой в очереди на дообслуживание.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_N(t))$, где состояние l-го узла в момент времени t описывается вектором $x_l(t)=(\bar{x}_l(t),j_l(t))=(x_{l1}(t),x_{l2}(t),...,x_{l,n(l)}(t),j_l(t))$, $x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t, $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t и т. д., $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t, $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – режим, в котором находится l-ый узел в момент времени t. Процесс $x(t)$ обладает конечным фазовым пространством состояний $Y=(x\in X_1\times X_2\times...\times X_N : n(1)+n(2)+...+n(N)=\overline{N}<\infty)$, где $X_l=\{(0,j_l),(x_{l1},j_l),(x_{l1},x_{l2},j_l),(x_{l1},x_{l2},x_{l3},j_l),...: x_{lk}=\overline{1,M}, k=1,2,...,n(l);\ j_l=\overline{0,r_l}\}$.

В качестве основного режима работы прибора полагается режим 0. Переход возможен только на соседние режимы.

Время пребывания в основном режиме работы имеет экспоненциальное распределение с параметром $\nu_l(\bar{x}_l,0)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний x_l, у которых $1\le j_l\le r_l-1$, время пребывания в режиме l также имеет экспоненциальное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_l(x_l)$ прибор l-го узла переходит в режим (j_l-1), а с интенсивностью $\nu_l(x_l)$ – в режим (j_l+1). Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет экспоненциальное распределение с параметром $\varphi_l(\bar{x}_l,r_l)$, после чего прибор переходит в режим (r_l-1).

Для упрощения записей введём в рассмотрение операторы:

$$T_u^+(\bar{x}_l)=T_u^+(x_{l1},...,x_{l,n(l)})=(x_{l1},...,x_{l,n(l)},u),$$

$$T^-(\bar{x}_l)=T^-(x_{l1},...,x_{l,n(l)})=(x_{l1},...,x_{l,n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x)=T_{(l,u)}^+(x_1,...,x_N)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(T_u^+(\bar{x}_l),j_l),$$

$$T_l^-(x)=T_l^-(x_1,...,x_N)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(T^-(\bar{x}_l),j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x)=R_l^{j_l+1}(x_1,...,x_N)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(\bar{x}_l,j_l+1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x)=R_l^{j_l-1}(x_1,...,x_N)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_N),\ \text{где}\ \tilde{x}_k=x_k\ \text{при}\ k\ne l,\ \tilde{x}_l=(\bar{x}_l,j_l-1),$$

$$l=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}.$$

Если в момент времени t состояние l-го узла представляет собой вектор $(\bar{x}_l,j_l)$ и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка типа u, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по её обслуживанию является случайной величиной $\eta_l(T_u^+(\bar{x}_l))$ с функцией распределения $B_l(T_u^+(\bar{x}_l),\tilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_l(T_u^+(\bar{x}_l))<\infty$. При этом $B_l(T_u^+(\bar{x}_l),0)=0$.

Если в момент времени t состояние l-го узла – вектор $(\bar{x}_l, j_l)$, то обслуживание ведётся со скоростью $\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)$, то есть зависит от состояния узла.

Переход прибора из режима обслуживания 0 в режим обслуживания 1 можно трактовать как частичную потерю работоспособности прибора, влекущую уменьшение скорости обслуживания с $\alpha_l(\bar{x}_l, 0)$ на $\alpha_l(\bar{x}_l, 1)$.

Аналогично, переход из режима j_l в режим $(j_l + 1)$ означает переход прибора в более щадящий режим обслуживания. Переход прибора из режима j_l в режим $(j_l - 1)$ означает восстановление тех возможностей, которые были утеряны при переходе из режима $(j_l - 1)$ в режим j_l.

Полагаем, что матрица $\left\| p_{(l,u)(k,v)} \right\|$, $u, v = \overline{1, M}$, $l, k = \overline{1, N}$, неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{v=1}^{M} \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, l = \overline{1, N}; u = \overline{1, M}, \tag{1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$.

Через $\psi_{lk}(t)$ обозначим количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в l-м узле, $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \psi_{l2}(t), ..., \psi_{l,n(l)}(t))$, $l = \overline{1, N}$.

В силу сказанного выше

$$\frac{d\psi_{l,k}(t)}{dt} = -\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{lk}, j_l),$$

если состояние l-го узла $(\bar{x}_l, j_l)$.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (x(t), \psi(t))$, который получается из $x(t)$ добавлением непрерывной компоненты $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_N(t))$.

Под $P = \{P(x)\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Функции

$$F(x, y) = F(x, y_{11}, y_{12}, ..., y_{1,n(1)}; y_{21}, y_{22}, ..., y_{2,n(2)}; ...; y_{N1}, y_{N2}, ..., y_{N,n(N)}) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} P\{x(t) = x; \psi_{l1}(t) < y_{l1}, \psi_{l2}(t) < y_{l2}; ...; \psi_{l,n(l)}(t) < y_{l,n(l)}, l = \overline{1, N}\},$$

будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$.

Основной результат. Для описанных выше сетей имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются соотношения*

$$\nu_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)\varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = \nu_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \tag{2}$$

$$l = \overline{1, N},\ j_l = \overline{1, r_l}, n(l) \geq 1, \sum_{l=1}^{N} n(l) = \overline{N} < \infty,$$

то стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y)$ *определяются по формулам*

$$F(x, y) = C(N, M, \overline{N}) p_1(x_1) p_2(x_2) \times \ldots \times p_N(x_N) \times \tag{3}$$

$$\times \prod_{l=1}^{N} \prod_{w=1}^{n(l)} \tau_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw}) \int_0^{y_{l,w}} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw}, \tilde{u})) d\tilde{u},$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{\nu_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)}, \tag{4}$$

$\varepsilon_{l,x_{lw}}$ *находятся из (1), а*

$$C(N,M,\bar{N})^{-1} = \sum_{\substack{n(1),n(2),\dots,n(N)\geq 0,\\ n(1)+n(2)+\dots+n(N)=\bar{N}}} \sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{j_2=0}^{r_2}\cdots\sum_{j_N=0}^{r_N}\prod_{l=1}^{N}\prod_{w=1}^{n(l)}\frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}\tau_l(x_{l1},x_{l2},\dots,x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1},x_{l2},\dots,x_{lw},j_l)}\times \tag{5}$$

$$\times\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(0,k-1)}{\varphi_l(0,k)},\ x\in Y.$$

Доказательство. Для $F(x,y)$ справедлива следующая система разностно-дифференциальных уравнений:

$$\left(\sum_{l=1}^{N}(\nu_l(\bar{x}_l,j_l)+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l))\right)F(x,y)= \tag{6}$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\alpha_l(\bar{x}_l,j_l)\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,n(l)}}-\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,n(l)}}\right)_{y_{l,n(l)}=0}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_s(T_u^{+}(\bar{x}_s),j_s)p_{(s,u)(l,x_{l,n(l)})}B_l(\bar{x}_l,y_{l,n(l)})\left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^{+}(T_l^{-}(x)),y)}{\partial y_{s,n(s)+1}}\right)_{y_{s,n(s)+1}=0}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_l(\bar{x}_l,j_l)p_{(l,u)(l,x_{l,n(l)})}B_l(\bar{x}_l,y_{l,n(l)})\left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^{+}(T_l^{-}(x)),y)}{\partial y_{l,n(l)}}\right)_{y_{l,n(l)}=0}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\nu_l(\bar{x}_l,j_l-1)F(R_l^{j_l-1}(x),y)+\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(\bar{x}_l,j_l+1)F(R_l^{j_l+1}(x),y),\ \ x\in X.$$

Для данных уравнений предполагаем, что если аргумент функции $F(x,y)$ не принадлежит фазовому пространству, то есть $x\notin Y$, то $F(x,y)=0$.

Разобьём полученную систему на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{N}\alpha_l(\bar{x}_l,j_l)\left(\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,n(l)}}\right)_{y_{l,n(l)}=0}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,n(l)}}\right)= \tag{7}$$

$$+\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_s(T_u^{+}(\bar{x}_s),j_s)p_{(s,u)(l,x_{l,n(l)})}B_l(\bar{x}_l,y_{l,n(l)})\left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^{+}(T_l^{-}(x)),y)}{\partial y_{s,n(s)+1}}\right)_{y_{s,n(s)+1}=0}+$$

$$+\sum_{u=1}^{M}\alpha_l(\bar{x}_l,j_l)p_{(l,u)(l,x_{l,n(l)})}B_l(\bar{x}_l,y_{l,n(l)})\left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^{+}(T_l^{-}(x)),y)}{\partial y_{l,n(l)}}\right)_{y_{l,n(l)}=0},$$

$$(\nu_l(\bar{x}_l,j_l)+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l))F(x,y)= \tag{8}$$

$$=\nu_l(\bar{x}_l,j_l-1)F(R_l^{j_l-1}(x),y)+\varphi_l(\bar{x}_l,j_l+1)F(R_l^{j_l+1}(x),y).$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(x,y)$, определенные формулами (3)–(5), являются решением уравнений (7)–(8) и, следовательно, уравнений (6).

Действительно, подставим (3) в уравнение (7), приведём подобные слагаемые и разделим обе части полученного соотношения на $B_l(\bar{x}_l,y_{l,n(l)})F(T_l^{-}(x),y)$. Получим уравнение трафика (1). Подставим (3) в (8). Учитывая (2), получим тождество.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы с учётом равенства $P(x)=F(x,+\infty)$ следует утверждение.

Следствие. *Если выполняются соотношения (2) и фиксированы первые моменты, то стационарное распределение* $\{P(x),x\in Y\}$ *не зависит от вида функций распределения* $B_l(\bar{x}_l,\tilde{u})$ *и имеет вид*

$$P(x) = C(N, M, \overline{N}) p_1(x_1) p_2(x_2) \times \ldots \times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$, $l = \overline{1, N}$ *, находятся по формулам (4), а* $C(N, M, \overline{N})$ *– (5).*

Заключение. В работе установлены условия инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети с многорежимными стратегиями обслуживания и заявками разных типов от вида законов распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок в узлах, когда дисциплиной обслуживания является LCFS PR (абсолютный приоритет поступающего требования с дообслуживанием). При этом установлено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель есть распределение отдельного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду. Этот результат был получен с помощью метода расширения фазового пространства: когда процесс, описывающий поведение сети (вообще говоря, немарковский), дополняют непрерывными компонентами. Описанный «расширенный» процесс является кусочно-линейным марковским процессом, для которого было найдено стационарное распределение.

Литература

1. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М. : Физматлит, 2004. – 772 с.
2. Ковалев, Е.А. Сети с ненадежными каналами и резервом / Е.А. Ковалев // Математические методы исследования сетей связи и сетей ЭВМ : тезисы докладов VI Белорусской школы-семинара по ТМО. – Минск, 1990. – С. 70–71.
3. Ковалев, Е.А. Стационарное распределение двухузловой замкнутой ненадежной сети с делящимся резервом / Е.А. Ковалев, Н.А. Чикунова // Современные математические методы исследования телекоммуникационных сетей : материалы международной конференции. – Минск, 1999. – С. 85–89.
4. Летунович, Ю.Е. Мультипликативность стационарного распределения состояний открытой сети с несколькими типами заявок и многорежимными стратегиями / Ю.Е. Летунович, Ю.В. Малинковский // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Междунар. науч. конф. «Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей», Гродно, 29 янв.–1 февр. 2007 г. / редкол. : А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск : РИВШ, 2007. – Вып. 19. – С. 134–137.
5. Малинковский, Ю.В. Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Информационные системы и технологии (IST'2002) : материалы I Междунар. конф., Минск, 5–8 ноября 2002 г. : в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т. ; – Минск, 2002. – Ч. 1. – С. 324–328.
6. Нуеман, А.Ю. Замкнутые сети с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Ю. Нуеман // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети : материалы Междунар. конф. «Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей», г. Минск, 23–25 янв. 2001 г. / Белорусский гос. ун-т. – Минск, 2001. – Вып. 16. – С. 159–160.
7. Старовойтов, А.Н. Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и дисциплиной обслуживания PS / А.Н. Старовойтов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы IX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 13–15 марта 2006 г. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол. : Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 199–-200.
8. Старовойтов, А.Н. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Проблемы передачи информации. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 121–128.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 11.09.2015